22. El piloto de un bombardero, que vuela a 2 kilómetros de altura y a una velocidad de 240 kilómetros por hora, observa un blanco terrestre hacia el que se dirige. Calcular la velocidad a la que debe girar el instrumento óptico cuando el ángulo entre la ruta del avión y la línea de mira es de 30°.

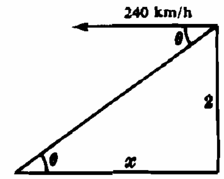

Fig. 12-8

$\dfrac{dx}{dt} = -240$ km/h, $\theta = 30°$, y $x = 2 \cot \theta$.

$\dfrac{dx}{dt} = -2 \csc^2 \theta \dfrac{d\theta}{dt}$ o sea $-240 = -2(4) \dfrac{d\theta}{dt}$, y $\dfrac{d\theta}{dt} = 30$ rad/h $= \dfrac{3}{2\pi}$ grados/s.

23. Un rayo de luz parte de un punto P y se propaga por el aire a una velocidad v_1 incidiendo sobre un punto O de una superficie de agua situada a unidades de longitud por debajo de P. Sabiendo que en el interior del agua se propaga a una velocidad v_2 y que pasa por otro punto Q a una distancia de b unidades de la superficie, demostrar que el paso de luz de P a Q se verifica de la manera más rápida cuando $\dfrac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$, siendo θ_1 y θ_2 los ángulos de incidencia y refracción con la normal a la superficie.

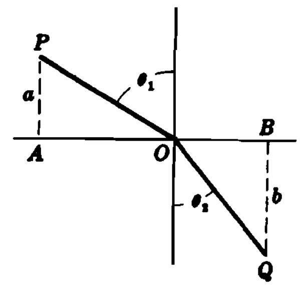

Fig. 12-9

Sea t el tiempo que emplea la luz en ir de P a Q y c la distancia de A a B; en estas condiciones,

$$t = \frac{a \sec \theta_1}{v_1} + \frac{b \sec \theta_2}{v_2} \quad \text{y} \quad c = a \operatorname{tag} \theta_1 + b \operatorname{tag} \theta_2$$

Derivando con respecto a θ_1,

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a \sec \theta_1 \operatorname{tag} \theta_1}{v_1} + \frac{b \operatorname{tag} \theta_2 \sec \theta_2}{v_2} \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad \text{y} \quad 0 = a \sec^2 \theta_1 + b \sec^2 \theta_2 \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1}$$

De la última ecuación, $\dfrac{d\theta_2}{d\theta_1} = -\dfrac{a \sec^2 \theta_1}{b \sec^2 \theta_2}$. Para que t sea mínimo se precisa que

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a \sec \theta_1 \operatorname{tag} \theta_1}{v_1} + \frac{b \sec \theta_2 \operatorname{tag} \theta_2}{v_2} \left(-\frac{a \sec^2 \theta_1}{b \sec^2 \theta_2} \right) = 0$$

de donde se obtiene la relación pedida.

Problemas propuestos

24. Hallar: (*a*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x}$, (*b*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$, (*c*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x \operatorname{sen}^2 3x}$, (*d*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$.
Sol. (*a*) 2, (*b*) a/b, (*c*) 8/9, (*d*) 0.

25. Deducir la fórmula 17 de derivación utilizando las relaciones (*a*) $\cot u = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$ y (*b*) $\cot u = \dfrac{1}{\operatorname{tag} u}$. Deducir asimismo las fórmulas de derivación 18 y 19.

Hallar las derivadas dy/dx o $d\rho/d\theta$ en los Problemas 26-45.

26. $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ *Sol.* $6 \cos 2x$

27. $y = 4 \cos \frac{1}{2}x$ *Sol.* $-2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

28. $y = 4 \operatorname{tag} 5x$ *Sol.* $20 \sec^2 5x$

29. $y = \frac{1}{4} \cot 8x$ *Sol.* $-2 \csc^2 8x$

30. $y = 9 \sec \frac{1}{3}x$ *Sol.* $3 \sec \frac{1}{3}x \operatorname{tag} \frac{1}{3}x$

31. $y = \frac{1}{4} \csc 4x$ *Sol.* $y = -\csc 4x \cot 4x$

32. $y = \text{sen}\, x - x \cos x + x^2 + 4x + 3$ *Sol.* $x \,\text{sen}\, x + 2x + 4$

33. $\varrho = \sqrt{\text{sen}\, \theta}$ *Sol.* $(\cos \theta)/(2\sqrt{\text{sen}\, \theta})$

34. $y = \text{sen}\, 2/x$ *Sol.* $(-2 \cos 2/x)/x^2$

35. $y = \cos (1 - x^2)$ *Sol.* $2x \,\text{sen}\, (1 - x^2)$

36. $y = \cos (1 - x)^2$ *Sol.* $y = 2(1 - x) \,\text{sen}\, (1 - x)^2$

37. $y = \text{sen}^2 (3x - 2)$ *Sol.* $3 \,\text{sen}\, (6x - 4)$

38. $y = \text{sen}^3 (2x - 3)$ *Sol.* $-\frac{3}{2} \{\cos (6x - 9) - \cos (2x - 3)\}$

39. $y = \frac{1}{2} \,\text{tag}\, x \,\text{sen}\, 2x$ *Sol.* $\text{sen}\, 2x$

40. $\varrho = \dfrac{1}{(\sec 2\theta - 1)^{3/2}}$ *Sol.* $\dfrac{-3 \sec 2\theta \,\text{tag}\, 2\theta}{(\sec 2\theta - 1)^{5/2}}$

41. $\varrho = \dfrac{\text{tag}\, 2\theta}{1 - \cot 2\theta}$ *Sol.* $2\, \dfrac{\sec^2 2\theta - 4 \csc 4\theta}{(1 - \cot 2\theta)^2}$

42. $y = x^2 \,\text{sen}\, x + 2x \cos x - 2 \,\text{sen}\, x$ *Sol.* $x^2 \cos x$

43. $\text{sen}\, y = \cos 2x$ *Sol.* $-\dfrac{2 \,\text{sen}\, 2x}{\cos y}$

44. $\cos 3y = \text{tag}\, 2x$ *Sol.* $-\dfrac{2 \sec^2 2x}{3 \,\text{sen}\, 3y}$

45. $x \cos y = \text{sen}\, (x + y)$ *Sol.* $\dfrac{\cos y - \cos (x + y)}{x \,\text{sen}\, y + \cos (x + y)}$

46. Si $x = A \,\text{sen}\, kt + B \cos kt$, siendo A, B, k constantes, demostrar que $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x$ y $\dfrac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (-1)^n k^{2n} x$.

47. Demostrar: (*a*) $y'' + 4y = 0$ siendo $y = 3 \,\text{sen}\, (2x + 3)$, (*b*) $y''' + y'' + y' + y = 0$ siendo $y = \text{sen}\, x + 2 \cos x$.

48. Estudiar las funciones siguientes en el intervalo $0 \le x < 2\pi$:

(*a*) $y = \frac{1}{2} \,\text{sen}\, 2x$ (*c*) $y = x - 2 \,\text{sen}\, x$ (*e*) $y = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
(*b*) $y = \cos^2 x - \cos x$ (*d*) $y = \text{sen}\, x (1 + \cos x)$

Sol. (*a*) Max. en $x = \pi/4, 5\pi/4$; min. en $x = 3\pi/4, 7\pi/4$; P.I. en $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$
(*b*) Max. en $x = 0, \pi$; min. en $x = \pi/3, 5\pi/3$; P.I. en $x = 32°32', 126°23', 233°37', 327°28'$
(*c*) Max. en $x = 5\pi/3$; min. en $x = \pi/3$; P.I. en $x = 0, \pi$
(*d*) Max. en $x = \pi/3$; min en $x = 5\pi/3$; P.I. en $x = 0, \pi, 104°29', 255°31'$
(*e*) Max. en $x = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$; min. en $x = \pi/3, \pi, 5\pi/3$; P.I. en $x = \pi/2, 3\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11/\pi 6$

49. Sabiendo que el ángulo de elevación del sol es de 45° y que va disminuyendo a razón de $\frac{1}{4}$ radianes por hora, hallar la velocidad a que se desplaza la sombra de una torre de 50 metros de altura sobre la tierra. *Sol.* 25 m/h.

50. Un cometa, a una altura de 120 metros sobre la tierra, se mueve horizontalmente a una velocidad de 10 metros por segundo. Hallar la velocidad a la que disminuye el ángulo de inclinación del hilo con la horizontal cuando la longitud de éste sea de 240 metros. *Sol.* 1/48 rad/s.

51. La luz de un foco situado a una distancia de 3 600 metros de una costa rectilínea gira a una velocidad de 4π radianes por minuto. Hallar la velocidad a la que se desplaza un rayo de luz sobre la costa (*a*) en el punto más próximo, (*b*) en un punto situado a 4 800 metros del punto más próximo. *Sol.* (*a*) 240π m/s, (*b*) $2\,000\pi/3$ m/s.

52. Las longitudes de dos lados de un triángulo son 15 y 20 metros. Hallar (*a*) la velocidad de variación del tercer lado cuando el ángulo formado por los otros dos es de 60° y aumenta a razón de 2° por segundo (*b*) la velocidad a la que aumenta el área. *Sol.* (*a*) $\pi/\sqrt{39}$ m/s, (*b*) $\frac{5}{6}\pi$ m²/s.